جامعة البعث / كلية العلوم — الإسم و الرقم الجامعي:

امتحان مادة ميكانيك (١) لطلاب السنة الثانية / قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي ٢٠١٦ – ٢٠١٧

السؤال الأول: (٥٠ درجة)

١. في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة $OXYZ$، حدد مع الرسم الوسطاء الكروية والأسطوانية لتعيين نقطة M في الفراغ ثم اكتب عبارتي متجه موضع النقطة و استنتج عبارتي سرعتها في هاتين الجملتين.

٢. تتحرك نقطة مادية P في المستوي XOY بحيث تعطى إحداثياتها بالقوانين الزمنية التالية

$$x=\theta Cos(\theta)\ ,\ y=\theta Sin(\theta)\quad ;\quad kt=\theta^2$$

اثبت أن حركة النقطة تخضع لقانون السطوح ثم عين متجها سرعة و تسارع الحركة.

السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

حقل مركزي نابذ مركزه النقطة $A(0,1,0)$ و يتناسب عكساً مع مربع البعد عن هذا المركز بثابت تناسب χ، عين هذا الحقل ثم أثبت أنه حقل كموني و أوجد تابع كمونه و احسب العمل الذي ينجزه متجه الحقل عندما تنتقل نقطة تحت تأثير هذا الحقل من الموضع $B(1,2,1)$ الى الموضع $C(3,2,1)$ ؟

السؤال الثالث: (٣٠ درجة)

أطلقت قذيفة كتلتها $2\ kg$ من نقطة على سطح الأرض بسرعة ابتدائية $100\ m\times s^{-1}$ تصنع مع الأفق زاوية $\pi/6\ Rad$ في وسط مقاوم تتناسب مقاومته طرداً مع سرعة القذيفة بثابت تناسب $0.2\ N\times s\times m^{-1}$. باعتبار نقطة انطلاق القذيفة O مركز للإحداثيات و اعتبار محور أفقي OX و محور شاقولي صاعد OY في مستوي حركة القذيفة، عين معادلات حركة القذيفة و قوانين حركتها ؟

ملاحظة: اعتبر تسارع الجاذبية الأرضية $g=10\ m\times s^{-2}$.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح

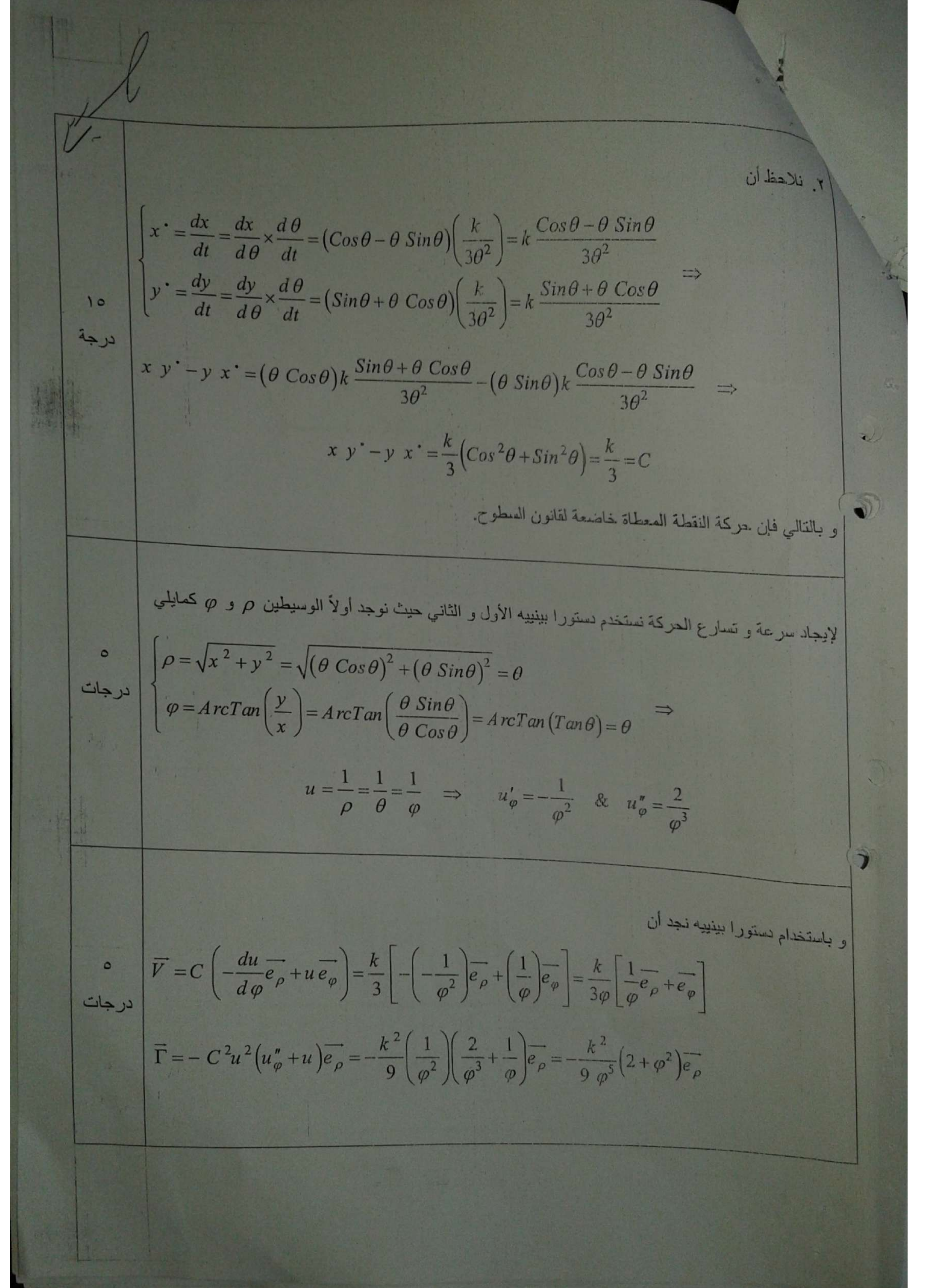
جامعة البعث / كلية العلوم / قسم الرياضيات

سلم تصحيح مادة الميكانيك (١)، لطلاب السنة الثانية / رياضيات

امتحان الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي ٢٠١٦ – ٢٠١٧

السؤال الأول: (٢٥ + ٢٥ = ٥٠ درجة)

٩ درجات	١. تعرف الإحداثيات الأسطوانية لنقطة في الفراغ بالعلاقات التالية $\begin{cases}\rho=\lVert\overrightarrow{OM_{xy}}\rVert\\ \varphi=\left(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OM_{xy}}}\right)\\ z=\lVert\overrightarrow{OM_{z}}\rVert\end{cases}$ و نضع $M(\rho,\varphi,z)$. أما الإحداثيات الكروية للنقطة فتعرف بالعلاقات التالية $\begin{cases}r=\lVert\overrightarrow{OM}\rVert\\ \theta=\left(\widehat{\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OM}}\right)\\ \varphi=\left(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OM_{xy}}}\right)\end{cases}$ و نضع $M(r,\theta,\varphi)$.
٤ درجات	كما نلاحظ أن متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ يعطى في هذه الإحداثيات بالشكل $\overrightarrow{OM}=\rho\overrightarrow{e_\rho}+z\overrightarrow{e_z} \quad , \quad \overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{e_r}$
٦ درجات	و بما أن $\dot{\overrightarrow{e_r}}=\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}+\dot{\varphi}\,Sin(\theta)\overrightarrow{e_\varphi} \quad , \quad \dot{\overrightarrow{e_\rho}}=\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} \quad , \quad \dot{\overrightarrow{e_z}}=\vec{0}$
٦ درجات	لإيجاد عبارتي متجه السرعة في الإحداثيات الأسطوانية و كروية نشتق متجه الموضع و نعوض فنجد $\vec{V}=\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}=\frac{d}{dt}\left(r\overrightarrow{e_r}\right)=\dot{r}\overrightarrow{e_r}+r\dot{\overrightarrow{e_r}}=\dot{r}\overrightarrow{e_r}+r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}+r\dot{\varphi}\,Sin(\theta)\overrightarrow{e_\varphi}$ $\vec{V}=\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}=\frac{d}{dt}\left(\rho\overrightarrow{e_\rho}+z\overrightarrow{e_z}\right)=\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho}+\rho\dot{\overrightarrow{e_\rho}}+\dot{z}\overrightarrow{e_z}+z\dot{\overrightarrow{e_z}}=\vec{V}=\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho}+\rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}+\dot{z}\overrightarrow{e_z}$



٢. نلاحظ أن

$$\begin{cases} x^{\cdot} = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dt} = \left(Cos\theta - \theta\, Sin\theta\right)\left(\dfrac{k}{3\theta^2}\right) = k\,\dfrac{Cos\theta - \theta\, Sin\theta}{3\theta^2} \\ y^{\cdot} = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dt} = \left(Sin\theta + \theta\, Cos\theta\right)\left(\dfrac{k}{3\theta^2}\right) = k\,\dfrac{Sin\theta + \theta\, Cos\theta}{3\theta^2} \end{cases} \Rightarrow$$

١٥ درجة

$$x\, y^{\cdot} - y\, x^{\cdot} = \left(\theta\, Cos\theta\right)k\,\frac{Sin\theta + \theta\, Cos\theta}{3\theta^2} - \left(\theta\, Sin\theta\right)k\,\frac{Cos\theta - \theta\, Sin\theta}{3\theta^2} \Rightarrow$$

$$x\, y^{\cdot} - y\, x^{\cdot} = \frac{k}{3}\left(Cos^2\theta + Sin^2\theta\right) = \frac{k}{3} = C$$

و بالتالي فإن حركة النقطة المعطاة خاضعة لقانون السطوح.

لإيجاد سرعة و تسارع الحركة نستخدم دستورا بينييه الأول و الثاني حيث نوجد أولاً الوسيطين ρ و φ كمايلي

٥ درجات

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\theta\, Cos\theta\right)^2 + \left(\theta\, Sin\theta\right)^2} = \theta \\ \varphi = ArcTan\left(\dfrac{y}{x}\right) = ArcTan\left(\dfrac{\theta\, Sin\theta}{\theta\, Cos\theta}\right) = ArcTan\left(Tan\theta\right) = \theta \end{cases} \Rightarrow$$

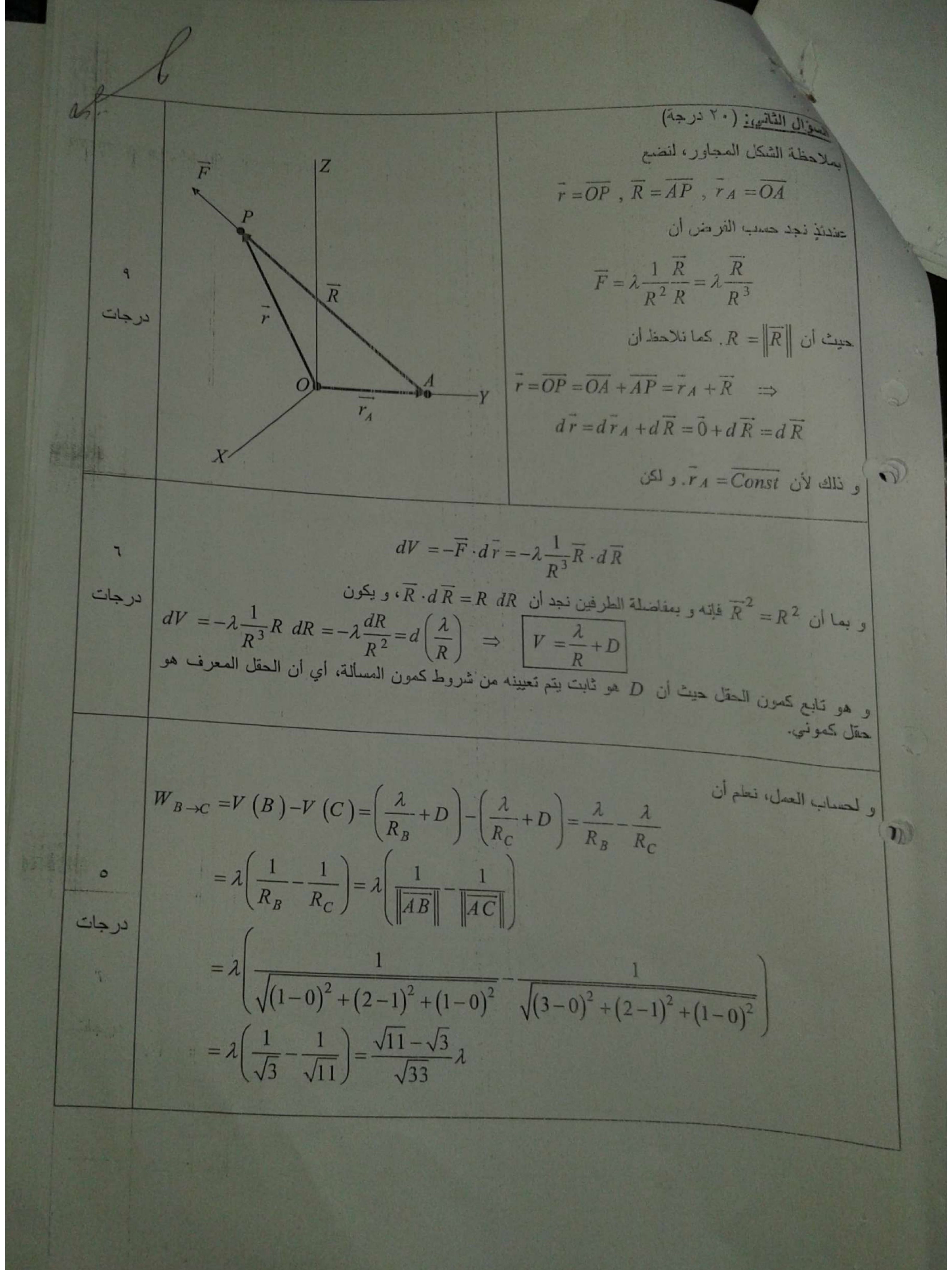
$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\varphi} \quad \Rightarrow \quad u'_{\varphi} = -\frac{1}{\varphi^2} \quad \& \quad u''_{\varphi} = \frac{2}{\varphi^3}$$

و باستخدام دستورا بينييه نجد أن

٥ درجات

$$\vec{V} = C\left(-\frac{du}{d\varphi}\overrightarrow{e_\rho} + u\,\overrightarrow{e_\varphi}\right) = \frac{k}{3}\left[-\left(-\frac{1}{\varphi^2}\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\frac{1}{\varphi}\right)\overrightarrow{e_\varphi}\right] = \frac{k}{3\varphi}\left[\frac{1}{\varphi}\overrightarrow{e_\rho} + \overrightarrow{e_\varphi}\right]$$

$$\vec{\Gamma} = -C^2u^2\left(u''_{\varphi} + u\right)\overrightarrow{e_\rho} = -\frac{k^2}{9}\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)\left(\frac{2}{\varphi^3} + \frac{1}{\varphi}\right)\overrightarrow{e_\rho} = -\frac{k^2}{9\,\varphi^5}\left(2 + \varphi^2\right)\overrightarrow{e_\rho}$$



السؤال الثاني: (٢٠ درجة)

بملاحظة الشكل المجاور، لنضع

$$\vec{r}=\overline{OP}\ ,\ \vec{R}=\overline{AP}\ ,\ \vec{r}_A=\overline{OA}$$

عندئذٍ نجد حسب الفرض أن

$$\vec{F}=\lambda\frac{1}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}=\lambda\frac{\vec{R}}{R^3}$$

حيث أن $R=\left\|\vec{R}\right\|$. كما نلاحظ أن

$$\vec{r}=\overline{OP}=\overline{OA}+\overline{AP}=\vec{r}_A+\vec{R}\quad\Rightarrow$$

$$d\vec{r}=d\vec{r}_A+d\vec{R}=\vec{0}+d\vec{R}=d\vec{R}$$

و ذلك لأن $\vec{r}_A=\overline{Const}$. و لكن

٩ درجات

$$dV=-\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\lambda\frac{1}{R^3}\vec{R}\cdot d\vec{R}$$

و بما أن $\vec{R}^2=R^2$ فإنه و بمفاضلة الطرفين نجد أن $\vec{R}\cdot d\vec{R}=R\ dR$، و يكون

$$dV=-\lambda\frac{1}{R^3}R\ dR=-\lambda\frac{dR}{R^2}=d\left(\frac{\lambda}{R}\right)\quad\Rightarrow\quad\boxed{V=\frac{\lambda}{R}+D}$$

و هو تابع كمون الحقل حيث أن D هو ثابت يتم تعيينه من شروط كمون المسألة، أي أن الحقل المعرف هو حقل كموني.

٦ درجات

و لحساب العمل، نعلم أن

$$W_{B\to C}=V(B)-V(C)=\left(\frac{\lambda}{R_B}+D\right)-\left(\frac{\lambda}{R_C}+D\right)=\frac{\lambda}{R_B}-\frac{\lambda}{R_C}$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{R_B}-\frac{1}{R_C}\right)=\lambda\left(\frac{1}{\left\|\overline{AB}\right\|}-\frac{1}{\left\|\overline{AC}\right\|}\right)$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2+(1-0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(3-0)^2+(2-1)^2+(1-0)^2}}\right)$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{\sqrt{33}}\lambda$$

٥ درجات

Scanned by CamScanner

السؤال الثالث: (٣٠ درجة)

نلاحظ أن حركة القذيفة هي حركة مستوية تقع في المستوي الشاقولي الذي يحوي متجه السرعة الابتدائية $\vec{v_0}$. باعتبار جملة مقارنة في مستوي الحركة مبدؤها نقطة إطلاق القذيفة و فيها المحور OX أفقي في اتجاه تقدم الحركة و المحور OY شاقولي صاعد و بملاحظة وجود قوتين مؤثرتين على القذيفة أثناء حركتها هما قوة ثقل القذيفة $m\,\vec{g}$ و قوة مقاومة الوسط $-\mu\,\vec{v}$ و بتطبيق المبدأ الأساسي في التحريك نجد أن

$$m\,\vec{g}-\mu\,\vec{v}=m\,\vec{\Gamma} \qquad (1)$$

و بالإسقاط على المحورين الإحداثيين نجد معادلات حركة القذيفة التالية

$$\begin{cases} OX: & 0-\mu\,\dot{x}=m\,\ddot{x} \\ OY: & -m\,g-\mu\,\dot{y}=m\,\ddot{y} \end{cases} \qquad (2)$$

و بتعويض $g=10$, $\mu=0.2$, $\alpha=\pi/6$, $v_0=100$, $m=2$، تصبح معادلات حركة القذيفة في المستوي حركة القذيفة XOY بالشكل

$$\ddot{x}=-\frac{1}{10}\dot{x} \quad , \quad \ddot{y}=-10-\frac{1}{10}\dot{y}$$

١٨ درجة

باستخدام المعادلة التفاضلية الأولى في (2) و المكاملة بالنسبة للزمن مرتين و استخدام الشروط الابتدائية $\dot{x}_0=v_0\,Cos(\alpha)$ و $x_0=0$ نجد القانون الزمني الأول للحركة و هو

$$x=\frac{m}{\mu}v_0\,Cos(\alpha)\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)$$

و باستخدام المعادلة التفاضلية الثانية في (2) و حلها نجد القانون الزمني الثاني للحركة

$$y=\left[\frac{m\,v_0}{\mu}\,Sin(\alpha)+g\left(\frac{m}{\mu}\right)^2\right]\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)-\frac{m\,g}{\mu}\,t$$

١٠ درجات

و بالتعويض، تصبح المعادلات الزمنية لحركة القذيفة في المستوي حركة القذيفة XOY بالشكل

$$x=500\sqrt{3}\left(1-e^{-\frac{1}{10}t}\right) \quad , \quad y=1500\left(1-e^{-\frac{1}{10}t}\right)-100\,t$$

درجتان

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي

انتهى السلم (اربع صفحات)